Uluslararası Sosyal Araştırmalar Dergisi / The Journal of International Social Research
Cilt: 11 Sayı: 59 Ekim 2018 Volume: 11 Issue: 59 October 2018
www.sosyalarastirmalar.com Issn: 1307-9581
http://dx.doi.org/10.17719/jisr.2018.2700

ÇOKLU KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE PALOMBA EKONOMİ MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ

STABILITY ANALYSIS OF THE PALOMBA MODEL IN ECONOMY BY FRACTIONAL-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTI-ORDERS

Bahatdin DAŞBAŞI[•]
Derviş BOZTOSUN[**]

Öz

Ekonomide, bir model, bir dizi değişken ve bunların arasında bir dizi mantıksal ve/veya niceliksel ilişki ile ekonomik süreçleri temsil eden kuramsal bir yapıdır. Bu bağlamda, ekonomik model karmaşık süreçleri göstermek için tasarlanmış, genellikle basitleştirilmiş matematiksel bir çerçevedir. Lotka-Volterra modeli ekonomide çokça kullanılmakta ve güncelliğini sürdürmektedir. Lotka-Volterra dinamiğini ekonomide tanıtmakla ünlü yazar Goodwin'dir (1967). Fakat Massimo di Mateo'nun 1988 yılında belirttiği gibi, ekonomist Giuseppe Palomba bu denklemleri 1939'da yayınlanan bir kitapta kullanmıştı. Palomba, giyim ve gıda gibi tüketim malları ve binalar ve makineler gibi sermaye malları olmak üzere yalnızca iki tür malın bulunduğu bir ekonomiyi dikkate alan matematiksel modelini adi diferansiyel denklemler (ODE) kullanarak önerdi. Bu çalışmada Palomba'nın ekonomi modeli çoklu kesirli mertebeli diferansiyel denklemler (FDE) yardımıyla ifade edilmiştir. Modelin denge noktaları bulunarak bu noktaların kararlılık analizi yapılmıştır. Ayrıca modelin analizi grafiksel olarak desteklenmiştir. Analizin sonuçlarına göre, bu iki tip malların pozitif olarak var olduğu denge noktasının kararlılığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Palomba Ekonomi Modeli, Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem, Matematiksel Model, Kararlılık Analizi.

Abstract

In economics, a model is a theoretical construct representing economic processes by a set of variables and a set of logical and/or quantitative relationships between them. In this sense, the economic model is a simplified, usually mathematical, framework designed to illustrate complex processes. Lotka-Volterra model is widely used in the economy and is up-to-date. The author famous for introducing the Lotka-Volterra dynamics in economics is Goodwin (1967). But, as indicated by Massimo di Mateo in 1988, the economist Giuseppe Palomba had used these equations in a book published in 1939. Palomba proposed the mathematical model formed by ordinary differential equation (ODE) considered an economy where there are only two types of goods: consumption goods, such as clothing and food, and capital goods, such as buildings and machinery. In this study, the Palomba model in economy was expressed by the fractional-order differential equations (FDE) with multiple order. Stability analysis was made by finding the equilibrium points of the model. In addition, the analysis of the model was graphically supported. According to the results of the analysis, it was showed the stability of the equilibrium point where these two types of goods existed positively.

Keywords: Palomba Economic Model, Fractional-Order Differential Equation, Mathematical Model, Stability Analysis.

1. Giriş

Matematiksel model, bir sistemin matematiksel kavramlar ve dil kullanılarak tanımlanmasıdır. Matematiksel model geliştirme süreci, matematiksel modelleme olarak adlandırılır. Matematiksel modeller, fizik, biyoloji, yer bilimi, meteoroloji gibi doğa bilimlerinde, bilgisayar bilimi, yapay zekâ gibi mühendislik disiplinlerinde ve bunların yanı sıra ekonomi, psikoloji, sosyoloji, siyaset bilimi gibi sosyal bilimlerde kullanılmaktadır. Özellikle geniş bir çalışma alanı olan sosyal bilimler, matematiksel modeller açısından zengin bir kaynaktır. Ekonomi, toplam ekonomi koşullarına odaklanan makroekonomi ve bireylerin davranışlarına odaklanan mikroekonomiyi içermektedir. Matematiksel modeller, fiyat, üretim seviyesi, talep, istihdam ve yatırım gibi çeşitli nicelikler arasındaki ilişkileri temsil etmek için ekonomide yaygın olarak kullanılmaktadır (Hritonenko, 2003). Bu bağlamda, döngüsel problemleri incelemek için Lotka-Volterra denklemlerinin ekonomiye girmesiyle 1965 yılında yaptığı çalışmalarla ünlenen ekonomist Richard M. Goodwin'dir (Goodwin, 1965). Ancak Palomba, Lotka-Volterra denklemlerini ekonomik modellerde çok daha önceden kullanmıştır.

Palomba (Palomba, 1939), sermaye ve tüketim malları olmak üzere sadece iki tip malların var olduğu bir ekonomiyi dikkate aldı. Palomba'nın önerdiği model şu varsayımlara sahiptir (Gandolfo, 2008):

• Dr. Öğr. Üyesi, Kayseri Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Muhasebe ve Finans Yönetimi Bölümü, bdasbasi@erciyes.edu.tr
** Prof. Dr., Kayseri Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Muhasebe ve Finans Yönetimi Bölümü, dboztosun@erciyes.edu.tr

(i) Malların a ve b olmak üzere iki tipi vardır. a tipi malların ürünleri doğrudan girmekte ve hemen tüketime hazır olan mallardır. b tipi mallar ise diğer sermaye mallarının ürünlerinin doğrudan girdiği ve sadece final mallarının ürünlerinin dolaylı olarak girdiği sermaye mallarıdır.

(ii) Ekonomi sermaye ekipmanlarını artırma eğiliminde dinamik bir durumdadır. a tipi emtiaların bir kısmı onların normal gideceği yerden başka yöne çevrilir ve b tipine tahsis edilir.

(iii) ε_1 ve ε_2 pozitif sabitleri göstermek üzere; ε_1, a tipi malların artış katsayısı ve $-\varepsilon_2$ ise b tipi malların artış katsayısını göstermektedir. Ayrıca a tipi mallar üstel olarak artmaktadır.

(iv) a tipi malların b tipi mallar vasıtasıyla artış katsayısı $-\gamma_1$ ve b tipi malların a tipi mallar vasıtasıyla artış katsayısı γ_2 olup γ_1 ve γ_2 pozitif sabitlerdir.

Dolayısıyla, C_1 ve C_2 sırasıyla a tipi ve b tipi malların t $(t \geq 0)$ zamanındaki hacimlerini göstermek üzere Palomba' nın önerdiği lineer olmayan otonom iki diferansiyel denklemden oluşan model;

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= C_1\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) \\ \frac{dC_2}{dt} &= -C_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 C_1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

olarak ifade edilmiştir.

Matematiksel modellerin oluşturulması ve incelenmesi aşamasında literatürde, adi diferansiyel denklemlerin yanı sıra kesirsel mertebeden diferansiyel denklemler yardımıyla matematik modellerle karşılaşılmaktadır. Son zamanlarda lineer olmayan dinamiklerde kesirli diferansiyel denklemlerin uygulanması ile ilgili çok sayıda çalışma mevcuttur (Wang, 2018). Tam mertebeli diferansiyel ve integrasyon kavramlarının daha genel hali kesirsel mertebeden diferansiyel ve integrasyon kavramları olduğundan dolayı, kesirsel mertebeden diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel modeller gerçek yaşam durumlarını modellerken göz ardı etmek zorunda kalınan parametrelerden kaynaklanan hataların minimuma indirilmesine yardımcı olmaktadır. Bu nedenle kesirsel mertebeden diferansiyel denklemlerle oluşturulan modeller daha gerçekçi ve uygulanabilirdir (Daşbaşı, 2018).

2. Tanımlar ve Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $t > 0$ için $f(t)$ fonksiyonun $\beta \in R^+$ mertebeli Caputo anlamında kesirli integrali:

$$I^\beta f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} f(s)ds \tag{2.1}$$

ile ve $\alpha \in (n-1, n]$ mertebeli Caputo anlamında kesirli türevi ise

$$D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t), \qquad D = \frac{d}{dt}. \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2. α-çoklu kesirsel mertebeden diferansiyel denklem sisteminin;

$$D_*^\alpha x(t) = f(t,x), x(0) = x_0 \tag{2.3}$$

olarak verildiğini varsayalım. Burada $i = 1,2,\dots,n$ olmak üzere, sistemdeki türevin mertebeleri $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]^T$ ile değişkenler $x = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ile başlangıç koşulları $x(0) = \left[x_{1_0}(0), x_{2_0}(0), x_{3_0}(0), \dots, x_{n_0}(0)\right]^T \in \mathbb{R}^n$ ile ve fonksiyonlar ise $f = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_n]^T \in \mathbb{R}^n$, f_i: $[0, +\infty) x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ile tanımlansınlar. Ayrıca $D_*^\alpha = \left[D_*^{\alpha_1}, D_*^{\alpha_2}, D_*^{\alpha_3}, \dots, D_*^{\alpha_n}\right]^T$ olarak dikkate alındığında, $D_*^{\alpha_i}$ ifadesi α_i–inci mertebeden Caputo anlamında kesirli türevi ifade etmektedir. Böylece $D_*^\alpha x(t) = \left[D_*^{\alpha_1} x_1(t), D_*^{\alpha_2} x_2(t), D_*^{\alpha_3} x_3(t), \dots, D_*^{\alpha_n} x_n(t)\right]^T$ olarak gösterilir. Buradaki türevin çoklu mertebeleri herhangi bir reel ya da kompleks vektör olabilir (Podlubny, 1999; Oldham, 1974). Bu çalışmada α_i türev mertebelerinin pozitif rasyonel sayılar olma durumu dikkate alınmıştır.

Tanım 2.3. (2.3) sisteminde $f(t,x) = f(x)$ olacak şekilde aşağıda gösterilen

$$D_*^\alpha x(t) = f(x), x(0) = x_0 \tag{2.4}$$

otonom sistemi dikkate alınsın. Çoklu kesirli mertebeden (2.4) otonom diferansiyel denklem sisteminin $\bar{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$ denge noktası $f(\bar{x}) = 0$ denklemini sağlayan noktalardır.

Lemma 2.1. (2.4) otonom sistemini dikkate alalım. Bu sistemin denge noktası $\bar{x}$ ve bu denge noktasında hesaplanan jakobiyen matris $J(\bar{x})$ olarak gösterilsin. Bu bağlamda, λ özdeğerleri,

$$det\big(diag(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - J(\bar{x})\big) = 0 \tag{2.5}$$

denklemini sağlayan noktalar olup burada m sayısı, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rasyonel sayılarının paydalarının en küçük ortak çarpanıdır (Odibat, 2010).

Lemma 2.2. (2.4) otonom sistemini dikkate alalım. Ayrıca $\bar{x}$ bu sistemin denge noktası ve $m = \frac{1}{\gamma}$ sayısı ise bu sistemdeki türevlerin mertebeleri olan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ rasyonel sayılarının paydalarının en küçük ortak çarpanı olsun. Bu noktanın lokal asimptotik kararlı olması için (2.5) denkleminden elde edilen tüm öz değerler ya Routh-Hurwitz kararlılık kriterini sağlamalı ya da $|arg(\lambda)| > \gamma\frac{\pi}{2}$ olmalıdır. Eğer $|arg(\lambda)| < \gamma\frac{\pi}{2}$ ise bu denge noktası kararsızdır (Deng, 2007).

3. Matematiksel Model

(1.1) denklem sisteminde ifade edilen Palomba modeli, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler yardımıyla,

$$\begin{aligned} &D_t^{\alpha_1} C_1 = C_1\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) \\ &D_t^{\alpha_2} C_2 = -C_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 C_1) \\ &0 < \alpha_1, \alpha_2 \le 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada $t \ge 0$ için sistemdeki türevin mertebeleri α_1 ve α_2 rasyonel sayıları olarak dikkate alındığında, $i = 1,2$ için $D_t^{\alpha_i}$ ifadesi α_i–inci mertebeden Caputo anlamında kesirli türevi göstermektedir. Ayrıca bu sistemde $C_1 \equiv C_1(t)$ ve $C_2 \equiv C_2(t)$ olup başlangıç koşulları $C_1(t_0) = C_{1_0}$ ve $C_2(t_0) = C_{2_0}$ ile tanımlanmaktadır. Bunlara ek olarak (3.1) sisteminde kullanılan parametreler pozitif reel sayılar olup,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0 \tag{3.2}$$

şeklindedir.

Tanım 3.1. (3.1) kesirsel mertebeden matematiksel model matris formunda,

$$\begin{aligned} &D^{\alpha} X(t) = f\big(X(t)\big) = UX(t) + x_1(t) N_1 X(t) \\ &X(0) = X_0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

olarak verildiğini varsayalım. Burada $i = 1,2$ olmak üzere sistemdeki türevlerin mertebeleri $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T$ ile değişkenler; $X(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T = [C_1(t), C_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ ile ve fonksiyonlar ise $f = [f_1, f_2]^T$, $f_i: [0, +\infty) \text{x} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ile tanımlansınlar. Ayrıca $D^{\alpha} = [D^{\alpha_1}, D^{\alpha_2}]^T$ olarak dikkate alındığında, D^{α_i} ifadesi α_i–inci mertebeden Caputo anlamında kesirli türevi ifade etmektedir. Böylece burada $D^{\alpha} X(t) = [D^{\alpha_1} x_1(t), D^{\alpha_2} x_2(t)]^T$ olmak üzere;

$$U = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}, X_0 = \begin{pmatrix} C_1(0) \\ C_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2. $X(t) = \big(x_1(t)\; x_2(t)\big)^T$ için $[0, T]$ aralığındaki sürekli sütun vektörlerinin bir seti $C^*[0, T]$ olsun. (3.3) denklemindeki $X(t) \in C^*[0, T]$ vektörünün normu $\|X(t)\| = \sum_{i=1}^{2} sup_t |x_i(t)|$ ile gösterilir.

Önerme 3.1. Tanım 3.1 dikkate alınmak üzere $\mathbb{R}_+^2 = \{X \in R^2 : X \ge 0\}$ ve $X(t) = (x_1(t)\; x_2(t)\,)^T$ olsun. Ayrıca $f(X) \in C[a, b]$ ve $0 < \alpha \le 1$ için $D^{\alpha} f(x) \in C[a, b]$ olsun. Genelleştirilmiş ortalama değer teoremi gereğince her $x \in [a, b]$ ve $0 \le \xi \le x$ için $f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} D^{\alpha} f(\xi)(x - a)^{\alpha}$ olur. Bu teoreme göre; Her $x \in [a, b]$ ve $i = 1,2$ için

- $D^{\alpha_i} f_i(x) \ge 0$ olduğunda, $f_i(x)$ fonksiyonu her bir $x \in [a, b]$ için artandır,
- $D^{\alpha_i} f_i(x) \le 0$ olduğunda, $f_i(x)$ fonksiyonu her bir $x \in [a, b]$ için azalandır.

Buna ek olarak, için $D^{\alpha_1} x_1(t)|_{x_1 = x_2 = 0} = 0$ ve $D^{\alpha_2} x_2(t)|_{x_1 = x_2 = 0} = 0$, olduğu için vektör alanı $\mathbb{R}^2$ içindeki noktalardırlar.

Önerme 3.2. Eğer $X(t) \in C^*[0, T]$ ise (3.3) sistemi tek bir çözüme sahiptir (Ahmed, 2007).

İspat (3.3) denklemindeki $D^{\alpha} X(t) = UX(t) + x_1(t) N_1 X(t)$ eşitliği göz önüne alınsın. Bu durumda, $X(t) \in C^*[0, T]$ vektörü $F\big(X(t)\big) \in C^*[0, T]$ şeklindedir. Ayrıca, $X(t), Y(t) \in C^*[0, T]$ ve $X(t) \neq Y(t)$ olacak şekildeki vektörler için:

$$\begin{aligned} &\big\|F\big(X(t)\big) - F\big(Y(t)\big)\big\| = \big\|\big(UX(t) + x_1(t)N_1X(t)\big) - \big(UY(t) + y_1(t)N_1Y(t)\big)\big\| \\ &= \|UX(t) + x_1(t)N_1X(t) - UY(t) - y_1(t)N_1Y(t)\| \\ &= \left\|U\big(X(t) - Y(t)\big) + x_1(t)N_1X(t) - y_1(t)N_1Y(t) - \left(\underbrace{x_1(t)N_1Y(t) - x_1(t)N_1Y(t)}_{0}\right)\right\| \\ &= \big\|U\big(X(t) - Y(t)\big) + x_1(t)N_1\big(X(t) - Y(t)\big) + \big(x_1(t) - y_1(t)\big)N_1Y(t)\big\| \\ &\le \big(\big\|U\big(X(t) - Y(t)\big)\big\| + \big\|x_1(t)N_1\big(X(t) - Y(t)\big)\big\| + \big\|\big(x_1(t) - y_1(t)\big)N_1Y(t)\big\|\big) \\ &\le \big(\|U\|\big\|\big(X(t) - Y(t)\big)\big\| + |x_1(t)|\|N_1\|\big\|\big(X(t) - Y(t)\big)\big\| + \|N_1\|\big|\big(x_1(t) - y_1(t)\big)\big|\|Y(t)\|\big) \end{aligned}$$

$$\leq \left((\|U\| + |x_1(t)|\|N_1\|)\|(X(t)-Y(t))\| + \|N_1\| \underbrace{|(x_1(t)-y_1(t))|}_{\leq\|(X(t)-Y(t))\|} \|Y(t)\| \right)$$
$$\leq (\|U\| + \|N_1\||x_1(t)| + \|N_1\|\|Y(t)\|)\|(X(t)-Y(t))\|$$
$$\leq \left(\|U\| + \|N_1\| \left(\underbrace{|x_1(t)|}_{\leq\|X(t)\|} + \|Y(t)\| \right) \right) \|(X(t)-Y(t))\|$$
$$\leq (\|U\| + (\|N_1\|)(\|X(t)\| + \|Y(t)\|))\|(X(t)-Y(t))\|$$
ve böylece
$$\|F(X(t)) - F(Y(t))\| \leq L\|(X(t)-Y(t))\| \tag{3.5}$$
olur. Burada $L = \|U\| + (\|N_1\|)(E_1 + E_2) > 0$ olacak şekildeki E_1 ve E_2 sayıları pozitif ve $X(t), Y(t) \in C^*[0,T]$ olduğundan $\|X(t)\| \leq E_1$, $\|Y(t)\| \leq E_2$ şeklindedir. Dolayısıyla (3.3) sisteminin tek bir çözümü vardır.

Önerme 3.3. (3.1) denklem sisteminin denge noktalarının genel ifadesi $i = 1,2$ için $E_i(\overline{C_1}, \overline{C_2})$ olarak gösterilsin. Dolayısıyla aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- $E_0(0,0)$ denge noktası her zaman vardır.
- $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası her zaman vardır.

İspat (3.1) sisteminin denge çözümü $D^{\alpha_1}C_1 = D^{\alpha_2}C_2 = 0$ olacak şekilde aşağıdaki sistemin çözümü ile bulunur.
$$\begin{aligned} &\overline{C_1}\,(\varepsilon_1 - \gamma_1\overline{C_2}) = 0 \\ &-\overline{C_2}(\varepsilon_2 - \gamma_2\,\overline{C_1}) = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$
(3.6) sisteminin çözülmesiyle;
$$E_0(0,0) \text{ ve } E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) \tag{3.7}$$
denge noktaları elde edilirler. İki tip malın hacimlerinin sıfır olduğu denge noktası $E_0(0,0)$ noktası olup her zaman vardır. Ayrıca (3.2) eşitsizliğinden dolayı iki tip malın hacimlerinin pozitif olarak var olduğu $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası da her zaman vardır. Böylece bu iki denge noktası ekonomik olarak anlamlıdırlar.

Önerme 3.4. (3.7)′ de gösterilen denge noktaları için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $E_0(0,0)$ denge noktası kararsızdır.

(ii) $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası kararlıdır.

İspat (3.1) sistemindeki fonksiyonlar;
$$\begin{aligned} &f(C_1, C_2) = C_1\,(\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) \\ &g(C_1, C_2) = -C_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 C_1) \end{aligned} \tag{3.8}$$
olarak tanımlansınlar. (3.1) sisteme ait jakobiyen matris kısmi türevler yardımıyla, $J = \begin{pmatrix} f_{C_1} & f_{C_2} \\ g_{C_1} & g_{C_2} \end{pmatrix}$ şeklindedir. Dolayısıyla bu matris,
$$J(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} (\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) & -\gamma_1 C_1 \\ \gamma_2 C_2 & (\varepsilon_2 - \gamma_2 C_1) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$
olarak bulunur. (3.7) de gösterilen her bir denge noktasında ($i = 1,2$) hesaplanan (3.9) daki jakobiyen matris için $det\left(diag(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J\left(E_i(\overline{C_1}, \overline{C_2})\right)\right) = 0$ denkleminden elde edilen λ özdeğerlerini göz önüne alalım. Eğer bu özdeğerler $|arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2m}$ şartını sağlarsa ″E_i denge noktası kararlıdır″ sağlamazsa ″E_i denge noktası kararsızdır″ denir. Burada m sayısı, α_1 ve α_2 rasyonel sayılarının paydalarının en küçük ortak çarpanıdır. Bu doğrultuda $E_0(0,0)$ ve $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktaları sırasıyla aşağıdaki şekilde incelenirler:

(i) $E_0(0,0)$ denge noktasını gözönüne alalım. Bu nokta için $J(E_0(0,0)) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ olup $det\left(diag(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J(E_0(0,0))\right) = det\begin{pmatrix} \lambda^{m\alpha_1} - \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \lambda^{m\alpha_2} - \varepsilon_2 \end{pmatrix} = 0$ eşitliğinden özdeğerlere ait karakteristik denklem;
$$(\lambda^{m\alpha_1} - \varepsilon_1)(\lambda^{m\alpha_2} - \varepsilon_2) = 0 \tag{3.10}$$
olarak bulunur. Dolayısıyla özdeğerler
$$\lambda^{m\alpha_1} = \varepsilon_1 \text{ ve } \lambda^{m\alpha_2} = \varepsilon_2 \tag{3.11}$$

eşitliklerinden elde edilirler. De-Moivre kuralları dikkate alındığında, (3.11) eşitlikleri $\lambda^{m\alpha_1} = \varepsilon_1 cis0$ ve $\lambda^{m\alpha_2} = \varepsilon_2 cis0$ şekline dönüşür ve böylece özdeğerler $i = 1,2,\ldots,m\alpha_1$ için $\lambda_i = \varepsilon_1^{\frac{1}{m\alpha_1}} cis0$ ve $j = m\alpha_1 + 1, m\alpha_1 + 2, \ldots, m\alpha_2$ için $\lambda_j = \varepsilon_2^{\frac{1}{m\alpha_2}} cis0$ denklemlerinden bulunurlar. Burada $\alpha_1 < \alpha_2$ olarak düşünülmüş olup aksi durum yine benzer şekilde yazılabilir. Dolayısıyla (3.2) eşitsizliği dikkate alındığında en az bir λ özdeğeri için $|arg(\lambda)| = 0 < \frac{\pi}{2m}$ olacağından dolayı Lemma 2.2 ʻ deki denge noktasının kararlılık kriterine göre $E_0(0,0)$ denge noktası kararsızdır.

(ii) $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası için $J\left(E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_1 \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{pmatrix}$ olarak bulunur. $det\left(diag(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}) - J\left(E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)\right)\right) = det\begin{pmatrix} \lambda^{m\alpha_1} & -\gamma_1 \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \gamma_2 \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} & \lambda^{m\alpha_2} \end{pmatrix} = 0$ eşitliğinden özdeğerlere ait denklem

$$\lambda^{m(\alpha_1+\alpha_2)} = -\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0 \tag{3.12}$$

şeklindedir. Yine De-Moivre kuralları dikkate alındığında, (3.12) eşitliği $\lambda^{m(\alpha_1+\alpha_2)} = \varepsilon_1\varepsilon_2 cis\pi$ olup özdeğerler $i = 1,2,\ldots,m(\alpha_1+\alpha_2)$ için

$$\lambda_i = \underbrace{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}_{>0}^{\frac{1}{m(\alpha_1+\alpha_2)}} cis\frac{\pi}{m(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{3.13}$$

olarak bulunurlar. Bu durumda $(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{\frac{1}{m(\alpha_1+\alpha_2)}} > 0$ olacağından dolayı denge noktasının kararlılık kriterine göre,

$$|arg(\lambda_i)| = \frac{\pi}{m(\alpha_1+\alpha_2)} > \frac{\pi}{2m} \tag{3.14}$$

şartı sağlanırsa $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası kararlıdır. (3.14) eşitsizliği düzenlendiğinde;

$$(\alpha_1+\alpha_2) < 2 \tag{3.15}$$

olarak kararlılık şartı ifade edilebilir. Böylece eğer (3.1) sisteminde $\alpha_1 + \alpha_2 < 2$ (yani α_1 ve $\alpha_2 \neq 1$ durumu) eşitsizliği sağlanırsa, $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası kararlı denge noktası ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ (yani α_1 ve $\alpha_2 = 1$ durumu) eşitliği sağlanırsa $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ denge noktası kararsız denge noktası olarak söylenir.

Kararlılık analizinin sonucu olarak aşağıdaki Tabloya ulaşılabilir.

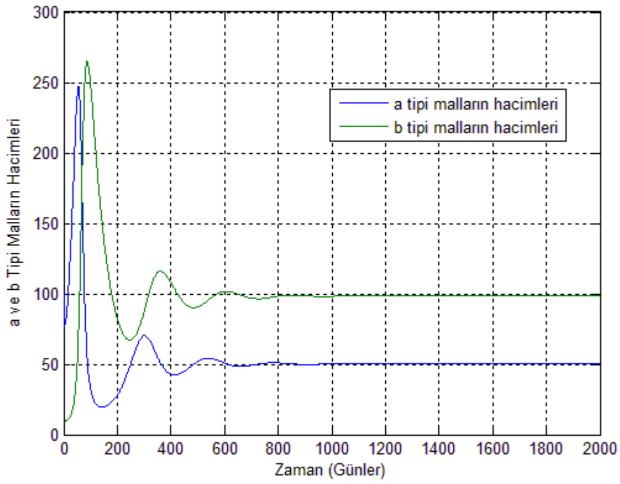
Tablo 1: (3.1) sisteminin denge noktalarının varlık ve kararlılık koşulları

Denge Noktası	Varlık Koşulu	Kararlılık Koşulu
$E_0(0,0)$	Her zaman vardır.	Kararsızdır.
$E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$	Her zaman vardır.	$(\alpha_1+\alpha_2) < 2$

4. Nümerik Çalışmalar

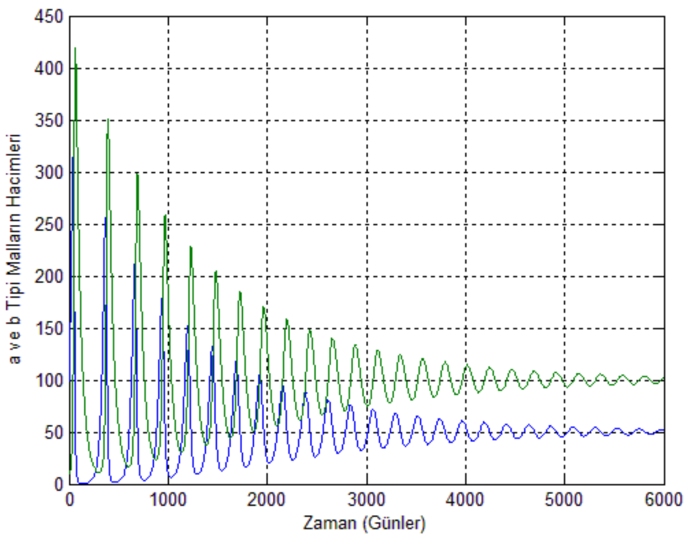
Bu kısımda (3.1) sisteminin Tablo 1ʹ de gösterilen analiz sonuçlarını desteklemek amacıyla sistemde kullanılan parametrelere değerler verilerek sistem grafiksel olarak gösterilmiştir.

Sistemdeki türevlerin mertebeleri sırasıyla Şekil 1 için $\alpha_1 = 0.75$ ve $\alpha_2 = 0.95$, Şekil 2 için $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 0.95$ ve Şekil 3 için $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 1$ olsun. Ayrıca parametreler $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0.01, \gamma_1 = 0.5$ ve $\gamma_2 = 0.01$ ve başlangıç koşulları ise (100,10) olarak dikkate alınsın.



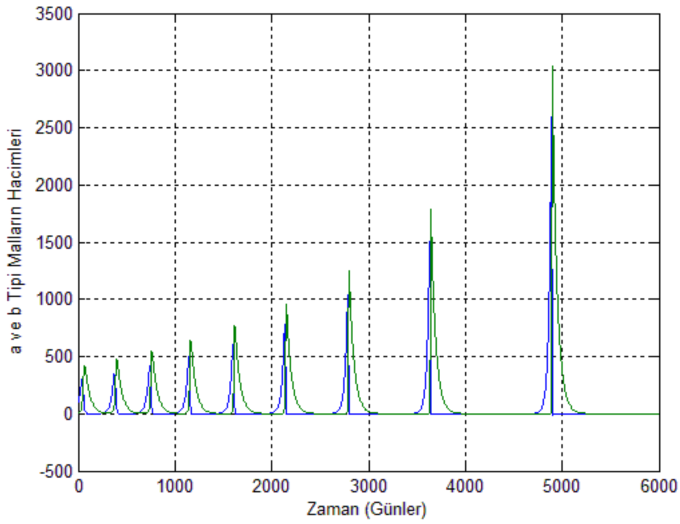
Şekil 1: $\alpha_1 = 0.75$ ve $\alpha_2 = 0.95$ için a ve b tipi malların hacimlerinin zamana bağlı değişimleri

$\alpha_1 = 0.75$ ve $\alpha_2 = 0.95$ olarak kabul edildiğinde $(\alpha_1 + \alpha_2) = 1.7 < 2$ bulunur. Böylece Şekil 1 den görüleceği üzere $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = E_1(50,100)$ denge noktası kararlıdır. Yani a tipi malların hacimleri 50 ve b tipi malların hacimleri ise 100 değerine yaklaşmaktadır.



Şekil 2: $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 0.95$ için a ve b tipi malların hacimlerinin zamana bağlı değişimleri

$\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 0.95$ olsun. Bu durumda $(\alpha_1 + \alpha_2) = 1.95 < 2$ olarak bulunur. Şekil 2 den görüldüğü gibi $E_1\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = E_1(50,100)$ denge noktası yine kararlı denge noktasıdır.



Şekil 3: $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 1$ için a ve b tipi malların hacimlerinin zamana bağlı değişimleri

$\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 1$ olduğunda ise denge noktasının kararlılık şartı sağlanamayacağından dolayı $E_1(50,100)$ denge noktası kararsızdır. Ayrıca bu durumda Palomba' nın önerdiği sonuçlar elde edilir. Yani sistemin çözümleri olan bu malların hacimleri zamana bağlı olarak döngüsel bir çerçevede değişir.

5. Sonuç ve Tartışma

Palomba, Lotka-Volterra denklemlerini ilk olarak kullanan kişidir. Ayrıca iş döngüsünün, ekonomik sistem için iç kaynaklı bir fenomen olduğunu ve bu fenomenin doğrusal bir sistem için dışsal şoklar gibi dış kaynaklı faktörler yüzünden değil doğrusalsızlık yüzünden ısrarcı olduğunu anlayan ilk kişidir. Yine, sabitler yerine zamana bağlı fonksiyonlar olarak Lotka-Volterra denklemlerinde bulunan katsayıları dikkate alarak, konjonktürel fenomenin daha genel olması gerektiğini öneren ilk kişi oldu (Gandolfo, 2008).

Dolayısıyla Palomba ekonomi modelinin farklı denklem sistemleri kullanılarak analiz edilmesi değişik bakış açıları katabilmektedir. Bu doğrultuda, farklı türev mertebeleriyle kesirli mertebeden diferansiyel denklemler yardımıyla model incelenmiş, denkleminin çözümlerinin varlığı ve tekliği ifade edilerek denge noktaları bulunmuştur. Ayrıca pozitif denge noktasının kararlılık analizi yapılarak grafikle gösterilmiştir. Dolayısıyla sistemdeki türevin mertebeleri olan α_1 ve α_2 rasyonel sayıları $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$ olarak kabul edilirse bu durumda Palomba' nın ifade ettiği malların zamana bağlı olarak hacimleri pozitif değerlere yaklaşmaktadır. Yani pozitif bir dengenin kararlılığından söz edilir. Palomba modelini $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ olarak önermiş ve analizini bu çerçevede yapmıştır. O, analiz sonuçlarını malların hacimlerinin döngüsel bir durumda bulunacağını ifade ederek açıklamıştır.

KAYNAKÇA

Ahmed, E., El-Sayed, A., El-Saka, H. (2007). Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator-prey and rabies models. *J. Math. Anal. Appl.*, *325*, 542-553.

Daşbaşı, B. (2018). Çoklu Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Kalitatif Analizi, Analizdeki Bazi Özel Durumlar ve Uygulaması: Av-Avci Modeli. *Fen Bilimleri ve Matematik'te Akademik Araştırmalar* (1. b., s. 127-157). içinde Ankara: Gece Kitaplığı.

Deng, W., Li, C. (2007). Analysis of Fractional Differential Equations with Multi-Orders. *Fractals, 15*(2), 173-182.

Gandolfo, G. (2008). Giuseppe Palomba and the Lotka-Volterra Equations. *Rendiconti Lincei, 19*, 347 – 357.

Goodwin, R. M. (1965). *A Growth Cycle*. Ekim 11, 2018 tarihinde http://orion.math.iastate.edu/driessel/14Models/1967growth.pdf adresinden alındı

Hritonenko, N., Yatsenko, Y. (2003). *Mathematical Modeling in Economics, Ecology and the Environment.* New York Heidelberg Dordrecht London: Springer.

Odibat, Z. M. (2010). Analytic study on linear systems of fractional differential equations. *Computers and Mathematics with Applications, 59*, 1171-1183.

Oldham, K. B., Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus.* New York: Academic Press.

Palomba, G. (1939). *Introduzione allo studio della dinamica economica.* Jovene, Napoli.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations.* Academic Press.

Wang, J., Xu, T.-Z., Wei, Y.-Q., Xie, J.-Q. (2018). Numerical solutions for systems of fractional order differential equations with Bernoulli wavelets. *International Journal of Computer Mathematics, DOI: 10.1080/00207160.2018.1438604*, 1-20.

Tablo ve Şekiller

Tablo 1: (3.1) sisteminin denge noktalarının varlık ve kararlılık koşulları
Şekil 1: $\alpha_1 = 0.75$ ve $\alpha_2 = 0.95$ için a ve b tipi malların hacimlerinin zamana bağlı değişimleri
Şekil 2: $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 0.95$ için a ve b tipi malların hacimlerinin zamana bağlı değişimleri
Şekil 3: $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 1$ için a ve b tipi malların hacimlerinin zamana bağlı değişimleri